

1. Il rapporto tra due quantità

Nel linguaggio corrente la parola **rapporto** ha vari significati. In matematica invece ...

Definizione il **rapporto tra due quantità** è il quoziente tra la prima quantità e la seconda quantità.

esempio

Nella famiglia Rossi ci sono 2 televisori e 5 persone.
Il rapporto tra le due quantità è il quoziente tra 2 e 5.

QUAL È IL
RAPPORTO?



Il rapporto tra due quantità (di cui la seconda sempre diversa da zero) si può indicare in tre modi:

1° MODO: CON LA DIVISIONE

esempio

$2 : 5$
(si legge «2 sta a 5» oppure «2 a 5»)

2° MODO: CON LA FRAZIONE

esempio

$\frac{2}{5}$

3° MODO: CON IL RISULTATO DELLA DIVISIONE

esempio

0,4

Infatti: $2 : 5 = \frac{2}{5} = 0,4$

RICORDA!

Per il rapporto vale la **proprietà invariantiva**: «se moltiplichi (o dividi) entrambi i termini del rapporto per uno stesso numero purché diverso da zero, otterrai un rapporto equivalente a quello iniziale».

I termini di un rapporto prendono due nomi diversi:

- il primo termine si chiama **antecedente**;
- il secondo termine si chiama **conseguente**.

esempio

$\begin{array}{ccc} 2 & : & 5 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{antecedente} & & \text{conseguente} \end{array} \quad \frac{2}{5} \rightarrow \begin{array}{l} \text{antecedente} \\ \text{conseguente} \end{array}$

Se scambi l'antecedente con il conseguente di un rapporto ottieni il **rapporto inverso** o **reciproco**.

esempio

Dato il rapporto $2 : 5$ (oppure $\frac{2}{5}$),
il rapporto inverso sarà $5 : 2$ (oppure $\frac{5}{2}$).

2. Il rapporto tra due grandezze



Quanto è stato detto per il rapporto tra due quantità vale anche per il rapporto tra due grandezze. (**Grandezza** = tutto ciò che può essere misurato.)

In questo caso, possiamo dire che:

Definizione Il rapporto tra due grandezze è il quoziente tra il valore della prima grandezza e il valore della seconda.

Nel caso di rapporti tra grandezze occorre tener presente 2 casi:

1° caso: le grandezze **sono omogenee** (**Grandezze omogenee** = grandezze che si possono misurare con la stessa unità di misura, per esempio peso con peso);

2° caso: le grandezze **non sono omogenee** (**Grandezze non omogenee** = grandezze che non si possono misurare con la stessa unità di misura, per esempio peso con volume).

1° CASO: RAPPORTO TRA GRANDEZZE OMOGENEE

Prendi in esame due grandezze omogenee, per esempio due pesi.

Immagina di dover calcolare il rapporto tra il peso della cartella e il peso del libro. Prima di tutto, dovrai riportare i due pesi nella stessa unità di misura (la più comoda, in questo caso, è g), poi potrai calcolare il rapporto.



10 kg = 10 000 g



500 g

$$\text{Rapporto} = \frac{\text{Peso cartella}}{\text{Peso libro}} = \frac{10000 \text{ g}}{500 \text{ g}} = \frac{20}{1} = 20.$$

numero puro

ATTENZIONE Anche se esprimi i pesi delle cartelle e del libro con una stessa unità di misura, diversa da g, il valore del rapporto non cambia. Infatti se trasformi tutto in hg hai:

$$\text{Rapporto} = \frac{\text{Peso cartella}}{\text{Peso libro}} = \frac{100 \text{ hg}}{5 \text{ hg}} = \frac{20}{1} = 20.$$

Come avrai notato il rapporto è un **numero puro**.

Regola Il rapporto tra il valore di due grandezze omogenee dà sempre origine a un «**numero puro**», cioè un numero che non è più accompagnato dall'unità di misura.

Questo numero può essere **razionale** (intero, decimale finito, decimale periodico) oppure **irrazionale**. Nel primo caso le grandezze si dicono **commensurabili**, nel secondo **incommensurabili**.

esempio

1. La lunghezza di AB è 12 cm e quella di CD è 15 cm. Il rapporto tra le due lunghezze è:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{12 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{4}{5} = 0,8 \rightarrow \text{è numero razionale}$$

↓
le grandezze sono commensurabili

2. La diagonale «d» di un quadrato è $\sqrt{2}$ cm e il lato «l» è 1 cm.

Il rapporto tra «d» ed «l» è:

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{2} \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = \sqrt{2} = 1,414... \rightarrow \text{è un numero irrazionale}$$

↓
le grandezze sono incommensurabili



2° CASO: RAPPORTO TRA GRANDEZZE NON OMOGENEE

Prendi in esame due grandezze non omogenee come per esempio la lunghezza e il tempo.

Immagina di dover calcolare il rapporto tra la lunghezza percorsa da un ragazzo (20 km) e il tempo impiegato per percorrere tale lunghezza (4 ore).



Come vedi, si ottiene 5 km/h (si legge: 5 km all'ora), un numero che è accompagnato dall'unità di misura km/h.

Nel linguaggio matematico si dice che è un **numero dimensionato**.

5 km/h è il valore di una **nuova grandezza** chiamata *velocità media*.

Avrai capito che:

Regola Il rapporto tra il valore di due grandezze non omogenee dà origine ad un numero accompagnato da tutte e due le unità di misura iniziali cioè un «numero dimensionato». Questo numero esprime il valore di una nuova grandezza chiamata **grandezza derivata**.

In sintesi:

Quando hai:



ESEGUI I SEGUENTI ESERCIZI

UNITÀ 3

Esercizi...

2. Il rapporto tra due grandezze

a pag. 112/114 STUDIO

RICORDA!

Il rapporto tra due grandezze è il quoziente tra il valore della prima grandezza e il valore della seconda.

- Quando le **grandezze** sono **omogenee** il rapporto è un numero puro che può essere:
 - razionale** (intero o frazionario) e in tal caso le grandezze sono **commensurabili**;
 - irrazionale**, e in tal caso le grandezze sono **incommensurabili**.
- Quando le **grandezze** **non** sono omogenee il rapporto è un numero accompagnato dalle loro unità di misura che esprime il valore di una nuova grandezza, chiamata **grandezza derivata**.

35. Qual è la risposta esatta?

- Il rapporto tra due grandezze omogenee è:
 - il quoziente tra i valori delle due grandezze
 - il quoziente tra i valori delle due grandezze espressi nella stessa unità di misura
- Il rapporto tra due grandezze omogenee è:
 - un numero accompagnato da un'unità di misura
 - un numero non accompagnato da un'unità di misura
- Il rapporto tra due grandezze non omogenee è:
 - un numero puro
 - un numero dimensionato
- Due grandezze omogenee il cui rapporto è un numero razionale sono:
 - commensurabili
 - incommensurabili
 - non omogenee
- Due grandezze omogenee il cui rapporto è un numero irrazionale sono:
 - commensurabili
 - incommensurabili
 - derivate

36. Rispondi sul tuo quaderno dopo avere studiato.

- Che tipo di numero puoi ottenere dal rapporto tra due grandezze omogenee?
- Se il rapporto tra due grandezze omogenee è un numero razionale, come si dicono le due grandezze?
- Fai un esempio di grandezze commensurabili e uno di grandezze incommensurabili.

37. Completa la tabella mettendo una crocetta nella colonna corrispondente.

Grandezze	Le due grandezze ...	
	sono omogenee	non sono omogenee
La lunghezza dell'autostrada A4 e il tratto di A4 Novara-Milano.		
L'area di un triangolo e quella di un quadrato.		
Il numero delle persone che abitano in Toscana e l'area di quella regione in km ² .		
Il peso di un elefante in tonnellate e quello di un orso in chilogrammi.		

Esercizi sul rapporto tra grandezze omogenee (vedi es. 3 e 4 pag. 113)

38. Ti viene chiesto di calcolare il rapporto tra 8 cm e 6 mm e tu fai così: $\frac{8 \text{ cm}}{6 \text{ mm}} = \frac{4}{3}$ 

- La prof. segna errore. Perché?
- Correggi l'errore** e calcola il rapporto richiesto.

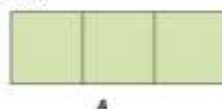
39. Osserva le figure ed esegui quanto richiesto.

- Calcola il rapporto tra A e A':

$$\frac{A}{A'} = \frac{\quad}{\quad}$$

- A e A' sono grandezze:

- omogenee commensurabili
- omogenee incommensurabili
- non omogenee



A



A'

1 cm²

(L'esercizio continua nella pagina seguente)

ESEGUI I SEGUENTI ESERCIZI

di allenamento

(Continuazione della pagina precedente)

B a Calcola il rapporto tra a e b :

$$\frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$$

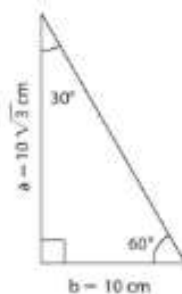
b Il rapporto è un numero:

a razionale b irrazionale

 a e b sono:

a commensurabili

b incommensurabili



40. Qual è il rapporto tra il peso di un pacco di biscotti da 200 g e il peso di una razione snack di 25 g degli stessi biscotti? [8]



41. Un bambino, in media, dorme 9 ore al giorno. Qual è il rapporto tra le ore di sonno e quelle di veglia? [10]



52. Il rapporto $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{3}$. Il rapporto inverso è:

a $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{1}$

b $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{3}$

c $\frac{CD}{AB} = 3$

53. Se il segmento AB è $\frac{7}{2}$ del segmento CD , allora il rapporto tra CD e AB è:

a $\frac{7}{2}$

b $\frac{2}{7}$

54. Se $\frac{AB}{CD} = 1$, quant'è il rapporto inverso? [1]



55. Disegna due segmenti a e b tali che $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$.



56. Disegna due segmenti AB e CD tali che $\frac{AB}{CD} = 2$.



57. Disegna due segmenti AB e CD tali che $\frac{AB}{CD} = 1,5$.



58. Disegna due rettangoli R e Q tali che:

a il rapporto tra le loro aree sia $\frac{4}{9}$;b il rapporto tra i loro perimetri sia $\frac{3}{2}$.

59. Disegna un quadrato tale che $\frac{d}{\ell} = \sqrt{2}$ (d = diagonale; ℓ = lato).



Esercizi sul rapporto tra grandezze non omogenee (vedi es. 5 e 6 pag. 115)

MATEMATICA E GEOGRAFIA Si chiama **densità di popolazione** il rapporto tra il numero degli abitanti di un territorio e l'area di quel territorio in km^2 .

$$\text{densità di popolazione} = \frac{\text{n. abitanti di un territorio}}{\text{area di quel territorio in km}^2}$$

60. Nella città *Ideale* ci sono 40 000 abitanti. Sai inoltre che la città occupa una superficie che ha l'area di 800 km^2 .

a Calcola la densità di popolazione. [50 ab./ km^2]b Quanti abitanti ci sono per ogni km^2 ? [50]

ESEGUI I SEGUENTI ESERCIZI

di allenamento

61. La densità di popolazione del paese A è di 15 ab/km² (si legge 15 abitanti per km²).



- Quanti abitanti ci sono ogni km²? _____.
- Quanti abitanti ci sono ogni 2 km²? _____. E ogni 3 km²? _____.
- Quanti abitanti ci sono se il paese A è di 10 km²? _____.
- Quale operazione devi fare per trovare il numero degli abitanti quando conosci la densità di popolazione di un territorio e l'area di quel territorio? _____.
- Completa la formula:
n. abitanti = densità · _____.

62. Il paese P ha 40 abitanti e una densità di 10 ab/km².



- Di quanti km² è il paese P?
a 1 km² **b** 4 km² **c** 400 km²
- Quale operazione devi fare per trovare i km² di un territorio quando conosci il numero degli abitanti e la densità? _____.
- Completa la formula: n. km² del territorio = n. abitanti _____.

MATEMATICA E SCIENZE Si chiama **peso specifico** il rapporto tra il peso di un oggetto e il suo volume.

In simboli:

$$ps = \frac{P}{V}$$

Dalla formula $ps = \frac{P}{V}$ puoi ricavare due formule inverse:

Formula diretta

$$ps = \frac{P}{V}$$

Per trovare il peso P
quando conosci ps e V

Formula inversa

$$P = ps \cdot V$$

Per trovare il volume V
quando conosci P e ps

Formula inversa

$$V = \frac{P}{ps}$$

Devi fare molta attenzione alle unità di misura.

Puoi esprimere il peso in **g** e il volume in **cm³**. In questo caso l'unità di misura del peso specifico sarà $\frac{g}{cm^3}$.

Puoi anche esprimere il peso in **kg** ma il volume dovrà essere espresso in **dm³**. In tal caso l'unità di misura del peso specifico sarà $\frac{kg}{dm^3}$.

Il peso specifico verrà trattato meglio quando affronterai la geometria solida. Per il momento ti proponiamo solo alcuni esercizi rimandando a momenti successivi la risoluzione di problemi e quesiti più impegnativi.

63. Un diamante pesa 49 g e ha un volume di 14 cm³.



Il peso specifico del diamante è:

- $3,5 \frac{g}{cm^3}$
- $0,28 \frac{g}{cm^3}$



64. Calcola il peso di una pepita d'oro ($ps = 19,3 \text{ g/cm}^3$) che ha volume di 10 cm³.

[193 g]

65. Calcola il volume di un filo di rame ($ps = 8,9 \text{ g/cm}^3$) che pesa 4 g.

[0,449 cm³]

66. Un autocarro trasporta un carico di 324 000 g formato da 1 200 blocchetti uguali, ciascuno dei quali ha un volume di 720 cm³.

Calcola il peso specifico di ciascun blocchetto.

[0,375 g/cm³]

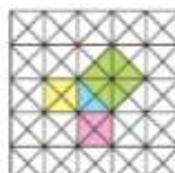
1. Che cos'è il Teorema di Pitagora

Approfondimento
Videolezione

LABORATORIO a pag. 136

IL TEOREMA

Si narra che Pitagora abbia scoperto il famoso teorema che porta il suo nome osservando il pavimento del palazzo del tiranno Policrate. Siamo in Grecia nel VI secolo a.C.



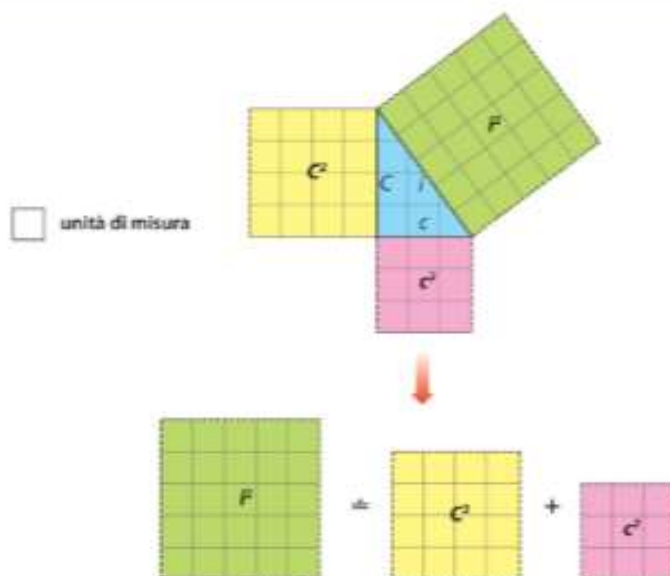
Pitagora osserva il pavimento e ha una geniale intuizione.

Il teorema vale solo per i triangoli rettangoli e afferma che:

Teorema In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costituiti sui cateti.



Laboratorio in +



Ciò significa che in un triangolo rettangolo con ipotenusa I e cateti C e c , l'area del quadrato avente per lato l'ipotenusa, è uguale all'area del quadrato avente per lato il cateto grande, più l'area del quadrato avente per lato il cateto piccolo.

In formula:

$$I^2 = C^2 + c^2$$

Dalla formula fondamentale $I^2 = C^2 + c^2$ puoi ricavare due formule inverse:

$$C^2 = I^2 - c^2$$

$$c^2 = I^2 - C^2$$

e quelle che ti consentono di ricavare I , C , c . (vedi pag. seguente)

APPROFONDIMENTO **Matematica e storia**

In matematica per "teorema" si intende una proposizione la cui verità deve essere dimostrata mediante il ragionamento.

Le fasi del ragionamento prendono il nome di "dimostrazione".

La dimostrazione che Pitagora fece non è conclusa con precisione: le scoperte della scuola Pitagorica non venivano, infatti, rivelate agli estranei.

La prima dimostrazione del Teorema di Pitagora si trova nell'opera «Elementi» di Euclide, matematico greco vissuto tre secoli più tardi.

Esistono anche altre dimostrazioni.

L'argomento
prosegue
a pag. 116 >

ESEGUI I SEGUENTI ESERCIZI

...provo subito

1. Scegli la risposta esatta poi riscrivila per completare la frase scritta sotto.

Il Teorema di Pitagora afferma che:

- a) in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti
b) in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti

Il Teorema di Pitagora afferma che _____

2. In quali triangoli vale il Teorema di Pitagora?



- a) In tutti i triangoli
b) solo nei triangoli ottusangoli
c) solo nei triangoli rettangoli
d) solo nei triangoli acutangoli

3. Quale delle seguenti relazioni è vera in base al Teorema di Pitagora?

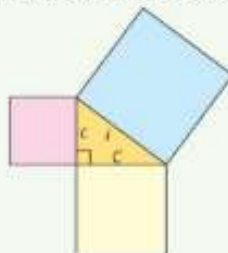
- a) $(\text{cateto magg.})^2 = (\text{ipotenusa})^2 + (\text{cateto min.})^2$
b) $\text{ipotenusa} = \text{cateto magg.} + \text{cateto min.}$
c) $(\text{ipotenusa})^2 = (\text{cateto magg.})^2 + (\text{cateto min.})^2$
d) $\text{ipotenusa} = (\text{cateto magg.})^2 + (\text{cateto min.})^2$



4. Osserva la figura; metti una crocetta sulle relazioni esatte, in base al Teorema di Pitagora, poi scrivile sul tuo quaderno.



- a) $i = C + c$
b) $i^2 = C^2 + c^2$
c) $C^2 = i^2 + c^2$
d) $c^2 = i^2 - C^2$
e) $C^2 = i^2 - c^2$



5. Qual è la risposta giusta?

- a) Gaia mangia più cioccolato di Emilia
b) Emilia e Gaia mangiano la stessa quantità di cioccolato
c) Emilia mangia più cioccolato di Gaia

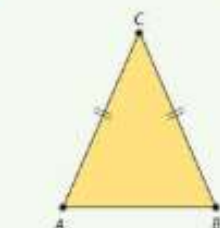


cioccolato mangiato da Gaia

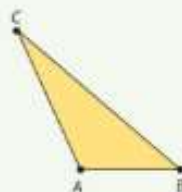


cioccolato mangiato da Emilia

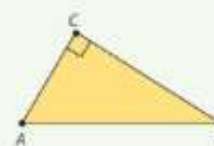
6. Metti una crocetta su V (vero) o F (falso).



$AB^2 = BC^2 + CA^2$ ☐ V ☐ F



$CB^2 = CA^2 + AB^2$ ☐ V ☐ F



$AB^2 = BC^2 + CA^2$ ☐ V ☐ F

LE FORMULE DERIVATE PER TROVARE I LATI

		FORMULE DERIVATE	
$i^2 = C^2 + c^2$	▶	$i = \sqrt{C^2 + c^2}$	Nel triangolo rettangolo, la misura dell'ipotenusa è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle misure dei due cateti.
$C^2 = i^2 - c^2$	▶	$C = \sqrt{i^2 - c^2}$	Nel triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale alla radice quadrata della differenza tra il quadrato della misura dell'ipotenusa e il quadrato della misura dell'altro cateto.
$c^2 = i^2 - C^2$	▶	$c = \sqrt{i^2 - C^2}$	

esempio

1. Calcola la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha i cateti di 12 km e 35 km.

$$i = \sqrt{C^2 + c^2} = \sqrt{35^2 + 12^2} = \sqrt{1\,225 + 144} = \sqrt{1\,369} = 37 \text{ km}$$

2. Calcola la misura del cateto maggiore di un triangolo rettangolo che ha l'ipotenusa di 65 cm e l'altro cateto di 39 cm.

$$C = \sqrt{i^2 - c^2} = \sqrt{65^2 - 39^2} = \sqrt{4\,225 - 1\,521} = \sqrt{2\,704} = 52 \text{ cm}$$

DAI LATI AL TIPO DI TRIANGOLO

In base alle misure dei tre lati x , y , z di un triangolo, puoi stabilire se il triangolo è rettangolo, ottusangolo o acutangolo. Se z è il lato maggiore e vale:

- $z^2 = x^2 + y^2$ allora il triangolo è **rettangolo**;
- $z^2 > x^2 + y^2$ allora il triangolo è **ottusangolo**;
- $z^2 < x^2 + y^2$ allora il triangolo è **acutangolo**.

LE TERNE PITAGORICHE

Tre numeri x , y , z (z è il maggiore) che soddisfano la condizione $z^2 = x^2 + y^2$ costituiscono una **terna pitagorica**.

Un esempio di terna pitagorica è:

$$\boxed{5}, \boxed{4}, \boxed{3} \text{ infatti } 5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 25 & = & 16 + 9 \end{array}$$

Una terna pitagorica formata da tre numeri primi tra di loro prende il nome di **terna pitagorica primitiva**.

Da ogni terna pitagorica primitiva, puoi ottenere infinite **terne pitagoriche derivate**. Come?

Basta moltiplicare ciascuno dei suoi componenti per uno stesso numero intero maggiore di uno.

esempio



Laboratorio in +

Un triangolo con:

$$z = 21 \text{ m} \quad x = 17 \text{ cm} \quad y = 10 \text{ cm}$$

è rettangolo, ottusangolo o acutangolo?

Risoluzione

$$z^2 = 21^2 = 441$$

$$x^2 + y^2 = 17^2 + 10^2 = 389$$

Poiché

$$441 > 389$$

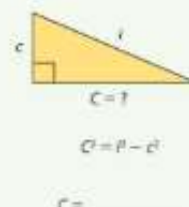
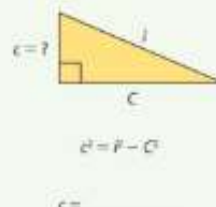
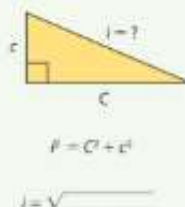
il triangolo è ottusangolo

Terna primitiva	Alcune terne derivate
5, 4, 3	$\cdot 2 \rightarrow 10, 8, 6$
	$\cdot 3 \rightarrow 15, 12, 9$
	ecc.

ESEGUI I SEGUENTI ESERCIZI

...provo subito

7. Ricava da ogni formula quella che ti consente di trovare la misura del lato sconosciuto del triangolo rettangolo.



procedura risolutiva

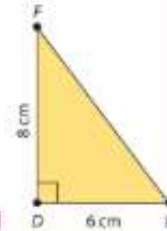
8. Osserva la figura e completa.

- Che tipo di triangolo è DEF, rispetto agli angoli? $\triangle DEF$ è un triangolo rettangolo.
- Colora l'ipotenusa di azzurro. L'ipotenusa è EF mentre i due cateti sono FD e DE .
- Conosci la misura di ciascun lato del triangolo rettangolo DEF? $FD = 8\text{ cm}$, $DE = 6\text{ cm}$.
- Di quale lato non conosci la misura? EF .
- La relazione tra i lati del triangolo rettangolo, in base al Teorema di Pitagora, è: $i^2 = C^2 + c^2$ che applicata al triangolo DEF diventa

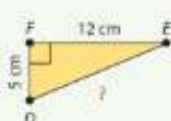
$$EF^2 = FD^2 + DE^2$$

Puoi dunque trovare la misura dell'ipotenusa così:

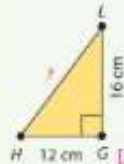
$$EF = \sqrt{FD^2 + DE^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$



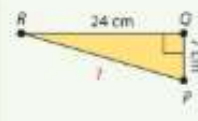
9. Segui i suggerimenti dell'esercizio n. 8 e calcola la misura del lato indicato con ?



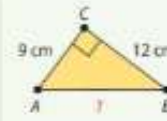
[13 cm]



[20 cm]



[25 cm]



[15 cm]

procedura risolutiva

10. Osserva la figura e completa.

- Che tipo di triangolo è DEF, rispetto agli angoli? $\triangle DEF$ è un triangolo rettangolo.
- Individua l'ipotenusa e colorala di azzurro. L'ipotenusa è EF mentre i due cateti sono FD e DE .
- Conosci la misura di ciascun lato del triangolo rettangolo DEF? $EF = 25\text{ cm}$, $DE = 20\text{ cm}$.
- Di quale lato non conosci la misura? FD .
- La relazione tra i lati del triangolo rettangolo, in base al Teorema di Pitagora, è: $i^2 = C^2 + c^2$ poiché devi trovare il cateto minore puoi scrivere

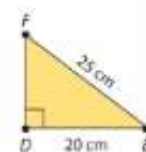
$$c^2 = i^2 - C^2$$

che applicata al triangolo DEF diventa

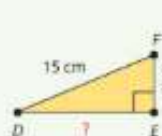
$$FD^2 = EF^2 - DE^2$$

Puoi dunque trovare la misura del cateto così:

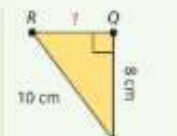
$$FD = \sqrt{EF^2 - DE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$



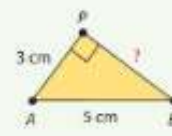
11. Calcola la misura del lato indicato con ?



[12 cm]



[6 cm]



[4 cm]



[20 cm]